VII Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

17 lutego 2005 r. **finał** czas: 90 min.

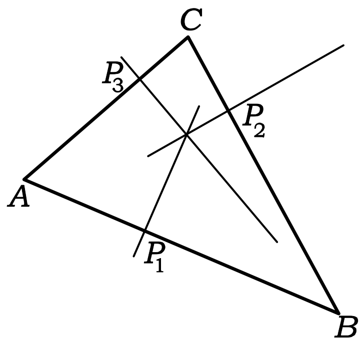
Przed Tobą do rozwiązania 4 zadania. Za każde zadanie możesz uzyskać maksymalnie 5 punktów.

1. W pewnej klasie dziewczęta stanowiły 62,5% liczby uczniów. Do klasy tej przybyła jedna osoba i wówczas dziewczęta stanowiły 64% liczby uczniów. Ile dziewcząt i ilu chłopców było w tej klasie na początku?

2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których $\dfrac{k^2+50}{k+5}$ jest liczbą całkowitą.

3. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ostrokątnego ABC wybrano odpowiednio punkty P_1, P_2, P_3 tak, że proste prostopadłe do boków tego trójkąta poprowadzone w punktach P_1, P_2, P_3 przecinają się w jednym punkcie (patrz rysunek). Uzasadnij, że zachodzi równość

$$|AP_1|^2+|BP_2|^2+|CP_3|^2=|AP_3|^2+|CP_2|^2+|BP_1|^2.$$



4. O liczbach a, b, c, d wiadomo, że

$$a=bcd, \quad a+b=cd, \quad a+b+c=d, \quad a+b+c+d=1.$$

Wyznacz te liczby.