IV Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

10 stycznia 2002 r. **finał** czas: 90 min.

Przed Tobą do rozwiązania 4 zadania. Za każde zadanie możesz uzyskać maksymalnie 5 punktów.

1. Figurom w komórkach tabeli przypisane są pewne liczby wg zasady: jednakowym figurom odpowiadają jednakowe liczby, a różnym figurom – różne liczby. Podane obok tabeli liczby to sumy w poszczególnych wierszach i kolumnach. Jakie liczby odpowiadają poszczególnym figurom oraz ile jest równa liczba a?

△	△	△	□	177
○	□	○	□	206
△	□	△	○	191
□	△	○	□	192
191	178	a	193	

2. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do jednej przekątnej. Odcinki te podzieliły tę przekątną na trzy części. Każda z tych części jest odcinkiem o długości 5 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta.

3. Dany jest okrąg K o średnicy AB. Okrąg L jest styczny do okręgu K i odcinka AB w jego środku. Okrąg M jest styczny do okręgów K i L oraz odcinka AB. Oblicz stosunek pól kół ograniczonych okręgami K i M, jeżeli promień okręgu K ma długość 4.

4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej a co najmniej jedna z liczb

$$A = a^3 - a \quad \text{i} \quad B = a^3 + a,$$

jest podzielna przez 10.

Kiedy obie z liczb A i B są jednocześnie podzielne przez 10?