XX Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

24 lutego 2018 r.	zawody finałowe	czas: 105 minut

Przed Tobą do rozwiązania 4 zadania. Za każde zadanie możesz uzyskać maksymalnie 5 punktów.

* * * * *

1. Wyznacz wszystkie pary (a,b) cyfr $(a \neq 0)$, dla których liczba

$$\overline{aa2018bb}$$

jest podzielna przez 36.

Uwaga. Zapis $\overline{xyz\ldots}$ oznacza liczbę naturalną, której kolejnymi cyframi zapisu dziesiątkowego (od lewej do prawej) są: x, y, z, $\ldots$

2. Liczby rzeczywiste a, b są różne od zera, nie są liczbami przeciwnymi oraz spełniają równanie

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b}.$$

Wykaż, że liczby te spełniają równanie

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}.$$

3. Dany jest trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, w którym: $AB = 12$, $CD = 4$, $AC = 20$. Punkt E jest środkiem podstawy AB. Odcinki BD i DE przecinają jego przekątną AC w punktach F i G. Oblicz długość odcinka FG.

4. W *Cyfrowej krainie* istnieje dziewięć miast o nazwach: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Podróżnik zauważył, że jeśli dwucyfrowa liczba naturalna zbudowana z nazw dwóch miast tej krainy dzieli się przez 3, to miasta te połączone są linią lotniczą. Czy podróżnik, wykorzystując te połączenia lotnicze, może dotrzeć z miasta 1 do miasta 9? Odpowiedź uzasadnij.

Powodzenia!