

**XVI Konkurs Matematyczny  
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej**

13 stycznia 2014 r.

zawody finałowe

czas: 90 minut

Przed Tobą do rozwiązania 4 zadania. Za każde zadanie możesz uzyskać maksymalnie 5 punktów.

\* \* \* \* \*

**1.** Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 1. \end{cases}$$

**2.** W okrąg o środku  $O$  wpisano taki czworokąt  $ABCD$ , że

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^\circ.$$

Wykaż, że proste  $AC$  i  $BD$  są prostopadłe.

**3.** Liczby całkowite  $a, b, c$  są różne od zera i spełniają równość

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = ab + bc + ca.$$

Wykaż, że liczba

$$\frac{a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)}{abc}$$

jest liczbą całkowitą.

**4.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Na jego bokach  $AB, BC, CA$  zaznaczono odpowiednio 3 punkty, 4 punkty i 5 punktów oraz wśród zaznaczonych punktów nie ma wierzchołków trójkąta  $ABC$ . Ile jest wszystkich trójkątów o wierzchołkach w zaznaczonych punktach? Odpowiedź uzasadnij.

*Powodzenia!*