XV Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora VVV LO w Bielsku-Białej

31 stycznia 2013 r. zawody finałowe czas: 90 minut

Przed Tobą do rozwiązania 4 zadania. Za każde zadanie możesz uzyskać maksymalnie 5 punktów.

* * * * *

1. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$A = \underbrace{444\ldots4}_{7n \text{ cyfr}}\underbrace{777\ldots7}_{n \text{ cyfr}}\underbrace{444\ldots4}_{7n \text{ cyfr}} + 2013$$

jest liczbą złożoną.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > BC > CA$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na bok AB. Wykaż, że dla każdego punktu X leżącego na odcinku CD prawdziwa jest równość

$$AC^2 + BX^2 = AX^2 + BC^2.$$

3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}} + \dfrac{1}{2\sqrt{b}} = \dfrac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{cases}$$

4. Zbiór $\mathcal{M}$ zawiera wszystkie liczby siedmiocyfrowe o cyfrach różnych należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Rozstrzygnij, czy w zbiorze $\mathcal{M}$ istnieje takich 77 liczb, że suma 33 z nich jest równa sumie 44 pozostałych.
Odpowiedź uzasadnij.

Powodzenia!