VIII Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej
eliminacje

17 listopada 2005 r. **czas: 90 min.**

Przed Tobą do rozwiązania test składający się z 21 zadań.
Do każdego pytania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując T lub N w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.
Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:
   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.
2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:
   a) $8\sqrt{30}-39$; c) $4\sqrt{30}-39$;
   b) $8\sqrt{30}+9$; d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi					Punkty
	a)	b)	c)	d)		
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Tematy zadań

1. Poniższa równość jest prawdziwa:

a) $2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5=4^6$,

b) $1+2+3=\sqrt{1^3+2^3+3^3}$,

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{2}{\sqrt{8}-2}=2\sqrt{2}+2$,

d) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac+2bc$.

2. Liczby $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ oraz $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ to liczby

a) niewymierne, c) odwrotne,
b) przeciwne, d) równe.

3. W trójkąt równoboczny T wpisano okrąg, a w ten okrąg wpisano trójkąt równoboczny T_1. Stosunek pola trójkąta T_1 do pola trójkąta T nie przekracza

a) 0,2; b) 0,3; c) 0,4; d) 0,5.

4. Liczba $x = 2357801129642358264$ jest liczbą

a) podzielną przez 2,
b) podzielną przez 3
c) podzielną przez 12,
d) podzielną przez 24.

5. Suma dwóch liczb pierwszych

a) może być liczbą pierwszą,
b) jest liczbą parzystą,
c) musi być liczbą pierwszą,
d) może być liczbą podzielną przez 21.

6. Średnia arytmetyczna S liczb dodatnich a, b, c jest dwa razy mniejsza od średniej arytmetycznej T liczb a, b, c, d. Wynika z tego, że

a) $d > 3S$,
b) $d = 5S$,
c) $d > 4S$,
d) liczba d jest większa od każdej z liczb a, b, c.

7. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest zawsze

a) nieparzysta,
b) podzielna przez 8,
c) parzysta,
d) podzielna przez 3.

8. Trzy lata temu Adam był cztery razy starszy od Bolka, a za trzy lata będzie starszy dwa razy. Zatem

a) teraz Adam jest trzy razy starszy od Bolka,
b) pięć lat temu Adam był dziesięć razy starszy od Bolka,
c) Adam jest teraz starszy od Bolka o 9 lat,
d) każda z poprzednich informacji o Adamie i Bolku jest prawdziwa.

9. Liczbę t_n nazywamy „liczbą trójkątną", jeżeli $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią. Prawdą jest dla liczb trójkątnych:

a) $t_{39} + t_{49} = 2005$,
b) istnieje takie n, że $t_{n+1} - t_n = n + 1$,
c) dla każdego n jest $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$,
d) dla każdego n jest $t_{n+1}^2 - t_n^2 = (n+1)^3$.

10. Jeżeli w trójkącie równobocznym r jest promieniem okręgu wpisanego, a R jest promieniem okręgu opisanego, to

a) $R = r\sqrt{3}$, c) $4r^2 = 3R^2$,

b) $R^2 = 4r^2$, d) $r\sqrt{3} = R\sqrt{2}$.

11. W której z podanych figur na pewno nie mieści się okrąg długości 12π

a) koło o promieniu 13, c) kwadrat o polu 16,

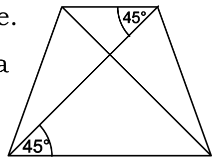
b) trójkąt równoboczny o obwodzie 13, d) prostokąt o polu 144.

12. Cyfrą jedności liczby $2005 + 2004^{2006}$ jest

a) 1, c) 5,

b) 3, d) inna niż poprzednie.

13. W trapezie równoramiennym przekątna ma długość 16 cm i tworzy z podstawami kąt 45°. Zatem pole tego trapezu jest równe



a) 108 cm², c) 64 cm²,

b) 32 cm², d) inne niż poprzednie.

14. Jaś i Małgosia od samego początku 45-minutowej lekcji matematyki przez 5 minut grają pod ławką w karty, przez następne 5 minut patrzą na tablicę, potem znowu przez 5 minut grają w karty i tak na przemian przez całą lekcję. Nauczyciel od wejścia do klasy zajęty jest pisaniem na tablicy. Jednak co pewien czas się ogląda. Nauczyciel ten może nie odkryć gry w karty Jasia i Małgosi, jeżeli odwraca się do klasy (przez całą lekcję, ale nie o pełnej minucie) w odstępach co:

a) 8 minut, c) 10 minut,

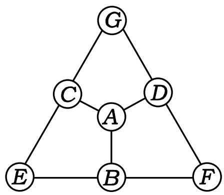
b) 9 minut, d) 11 minut.

15. Przy dzieleniu liczby 999 przez pewną liczbę dwucyfrową n otrzymano resztę 3. Jaka może być reszta z dzielenia liczby 2005 przez tę liczbę n?

a) 1, c) 11,

b) 5, d) 13.

16. Liczby naturalne od 1 do 7 są ukryte pod kartkami *A, B, C, D, E, F, G* (patrz rysunek). Wiadomo, że sumy liczb będących w wierzchołkach każdego z trzech czworokątów są równe 13. Jaka liczba ukryta jest pod literą *A*?



a) nie da się wyznaczyć, c) 1,

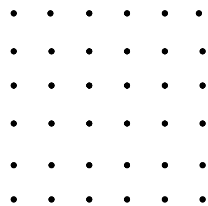
b) większa niż 3, d) mniejsza niż 5.

17. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych wynosi $\sqrt{19}$, a przeciwprostokątna ma długość 4. Wówczas:
a) pole tego trójkąta wyraża się liczbą całkowitą,
b) wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość mniejszą niż 1,
c) Pole tego trójkąta jest większe niż 2,
d) pole tego trójkąta wyraża się liczbą niewymierną.

18. Dwa zewnętrznie styczne okręgi o równych promieniach długości 2 są styczne do prostej k. Trzeci okrąg jest styczny do prostej k i zewnętrznie styczny do dwóch pierwszych okręgów. Zatem jego promień ma długość
a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, d) $\frac{3}{5}$.

19. W wyborach na prezydenta dużego kraju startuje trzech kandydatów: Prawdziwy, Prawdziwszy i Najprawdziwszy. Głosuje na nich zawsze (i chodzi na wybory) odpowiednio: 5%, 10% i 15% ogółu wyborców. Głosy pozostałych wyborców, którzy stawią się do urn, dzielą się w stosunku odpowiednio 5 : 2 : 1. Zwycięzcą zostaje kandydat, który uzyska największą liczbę głosów.
a) przy frekwencji 40% prezydentem zostanie Najprawdziwszy,
b) przy frekwencji 60% prezydentem zostanie Prawdziwszy,
c) przy frekwencji 80% prezydentem zostanie Prawdziwy,
d) dokładnie jedna z poprzednich odpowiedzi jest fałszywa.

20. Odległości w poziomie i pionie pomiędzy sąsiednimi punktami narysowanej obok kratownicy równe są 1 cm. Ile jest odcinków długości 5 cm o końcach w punktach tej kratownicy?



a) więcej niż 40, c) 36
b) mniej niż 40, d) 42.

21. Piłka futbolowa uszyta jest z łatek sześciokątnych i pięciokątnych. Wszystkich łatek jest 32. Każdy sześciokąt jest biały i graniczy z trzema innymi sześciokątami oraz z trzema pięciokątami, które są czarne. Każdy pięciokąt graniczy tylko z sześciokątami.
a) łatek białych jest o 12 więcej niż czarnych,
b) liczba wszystkich krawędzi wynosi 90,
c) liczba ścian + liczba wierzchołków – liczba krawędzi = 2,
d) wierzchołków jest 50.