IV Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

15 listopada 2001 r. eliminacje czas: 90 min.

Przed Tobą do rozwiązania test składający się z 24 zadań.

Do każdego pytania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując T (tak) lub N (nie) w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.

Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:
   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:
   a) $8\sqrt{30}-39$; b) $4\sqrt{30}-39$;
   c) $8\sqrt{30}+9$; d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi				Punkty
	a)	b)	c)	d)	
1.	T	T	N	T	
2.	T	N	N	N	

Tematy zadań

1. Wartość wyrażenia $\frac{4}{11}+\frac{3}{22}+\frac{2}{33}+\frac{1}{44}$ jest:

a) równa $\frac{77}{132}$; b) mniejsza niż 0,6;

c) większa niż $\frac{1}{2}$; d) równa $\frac{7}{12}$.

2. Sześcian połowy trzykrotności liczby jest równy trzykrotności połowy sześcianu tej liczby:

a) dla dowolnej liczby rzeczywistej; b) tylko dla liczby 0;

c) tylko dla liczby 1; d) nie ma takiej liczby.

3. Równość $|a+b| = |a| + |b|$ zachodzi:

a) jeżeli a i b są ujemne;
b) dla dowolnych liczb a i b;
c) jeżeli jedna z liczb a, b jest równa 0;
d) jeżeli a i b są różnych znaków.

4. Punkt $A = (-2, 4)$ jest środkiem odcinka PQ, gdzie $P = (2, -2)$. Wtedy:

a) $Q = (0,1)$; b) $Q = (-6,6)$;
c) $Q = (-6,10)$; d) $Q = (-2,6)$.

5. Dla jakiej liczby x ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dokładnie dwa z poniższych zdań są fałszywe:

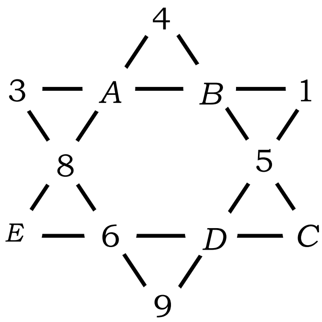
- x jest liczbą całkowitą;
- $x^2 - 3x$ jest liczbą ujemną;
- $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą;

a) 2; b) 3; c) 4; d) 5.

6. Suma $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots + 1997 + 1998 - 1999 - 2000 + 2001$ jest:

a) równa 1; b) równa 2001;
c) większa niż 1000; d) mniejsza niż 2000.

7. Liczby naturalne od 1 do 12 rozmieszczono na rysunku tak, że suma każdych czterech leżących na jednej prostej jest taka sama. Liczba 7 może stać na miejscu:

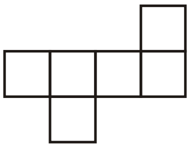
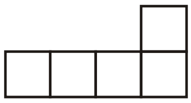
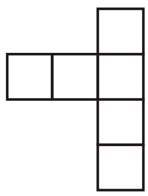
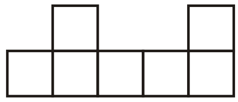


a) A; b) B; c) C; d) D.

8. Ile jest liczb całkowitych n, dla których liczba $\frac{n+4}{n+3}$ jest całkowita?

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6.

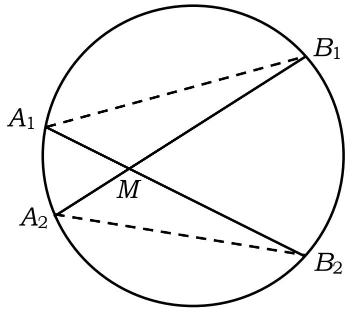
9. Chcemy skleić pudełko w kształcie sześcianu, otwarte od góry, ale z podwójnym dnem, żeby było mocniejsze. Który szablon może do tego posłużyć:

a)  b)  c)  d) 

10. Dane są dwa równania o niewiadomej x: $(p-1)x = 1$ i $(x-1)p = 1 - p$. Równania te mają dokładnie jedno wspólne rozwiązanie dla p równego:

a) 4; b) 3; c) 2; d) 1.

11. Punkty A_1, A_2, B_1, B_2 leżą na jednym okręgu (patrz rysunek). Poniższa równość jest prawdziwa:



a) $\dfrac{|A_1M|}{|A_2M|} = \dfrac{|B_1M|}{|B_2M|}$;   b) $|B_1A_1| \cdot |A_1M| = |A_2B_2| \cdot |B_1M|$;

c) $\dfrac{|A_1M|}{|A_1B_1|} = \dfrac{|A_2M|}{|A_2B_2|}$;   d) $|A_2B_2| \cdot |A_1M| = |A_1B_1| \cdot |A_2M|$.

12. Liczba 2772 jest liczbą palindromiczną, tzn. czytana z lewa w prawo i odwrotnie jest taką samą liczbą. Ile jest trzycyfrowych liczb palindromicznych, które są podzielne przez 4?

a) 20;   b) 24;   c) 28;   d) 32.

13. W ciągu pięciu liczb: (2, _ , _ , _ , 500) brakuje trzech wyrazów. Wiadomo, że każdy wyraz tego ciągu, począwszy od trzeciego, jest iloczynem dwóch wyrazów poprzedzających go.

a) suma brakujących liczb jest równa 567;
b) iloczyn brakujących liczb jest równy 2500;
c) wszystkie brakujące liczby są podzielne przez 5;
d) jedna z brakujących liczb jest liczbą pierwszą.

14. Roztwór wodny zawiera 4% soli. Do 45 kg tego roztworu dolano czystej wody i otrzymano roztwór, który zawiera 3% soli. Zatem dolano:

a) 15 kg wody;   b) 15,5 kg wody;
c) 16 kg wody;   d) więcej niż 15 kg wody.

15. Styczne do okręgu poprowadzone przez wierzchołki prostokąta wpisanego w ten okrąg zawsze tworzą:

a) prostokąt;   b) trapez;   c) romb;   d) kwadrat.

16. Dla danej dodatniej liczby naturalnej n niech $D(n)$ oznacza zbiór dzielników naturalnych liczby n, a $d(n)$ liczbę elementów zbioru $D(n)$. Np. $D(6) = \{1,2,3,6\}$ i $d(6) = 4$. Poniższe stwierdzenie jest fałszywe:

a) $d(2^5) = 5$;   b) $d(111) = 4$;   c) $d(60) = 8$;   d) $d(4) = 4$.

17. Twoim zadaniem jest przejście z kwadratu A do kwadratu B poruszając się tylko poziomo lub pionowo. Maszerując dodajesz punkty z kolejnych kwadratów, przez które przechodzisz. Jaką najmniejszą liczbę punktów możesz uzyskać?

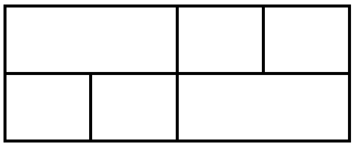
9	4	*B*
6	8	6
9	11	7
A	8	10

a) 27;   b) 28;
c) 31;   d) 32.

18. Między liczbami $a = 999333^2$ i $b = 999332 \cdot 999334$ zachodzi związek:

a) $a^2 = b^2 - 1$; b) $a = b + 1$. c) $a = 2b$; d) $b = a + 1$;

19. Ile jest wszystkich prostokątów na rysunku obok?



a) 6; b) 11;

c) 15; d) 18.

20. Właściwą kolejnością liczb $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}$ od najmniejszej do największej jest:

a) $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}$; b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{\pi}, \sqrt{\frac{1}{3}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\pi}$

d) $\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{\pi}$.

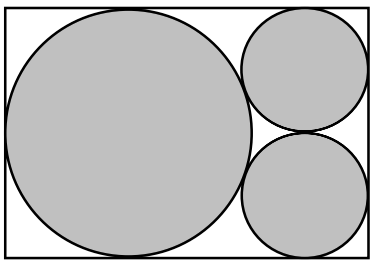
21. Rowerzysta pokonuje trasę między Nowym Lipnem a Starym Lipnem tam i z powrotem. Drogę „tam" pokonuje z prędkością 15 km/godz.,
a drogę „z powrotem" z prędkością 10 km/godz. Jaka jest średnia prędkość rowerzysty na całej trasie?

a) za mało danych; b) 12 km/godz.;
b) 12,5 km/godz.; d) 14 km/godz.

22. W pewnym konkursie liczba uczestników powiększyła się w stosunku do roku ubiegłego o 32%. W roku ubiegłym liczba dziewcząt wynosiła 55%, a w tym tylko 50%. W porównaniu z rokiem ubiegłym liczba dziewcząt:

a) zmniejszyła się o 5%; b) pozostała bez zmian;
c) zwiększyła się o 11%; d) zwiększyła się o 20%.

23. W prostokąt wpisano dwa jednakowe koła mniejsze i jedno koło większe (tak jak na rysunku). Koła te są styczne do boków prostokąta i wzajemnie styczne zewnętrznie. Mniejszy z boków prostokąta ma długość 4. Jaką długość ma większy z boków tego prostokąta:



a) $3 + 2\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

c) 5,5; d) większą niż 6.

24. Jeżeli $f(x) = x + \frac{1}{x}$, to $f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right)$ równa się:

a) $2a - \frac{2}{a}$; b) 0; c) $a - \frac{1}{a}$; d) $\frac{a^4 - a^2 + 1}{a(a^2 - 1)}$.