XIX Konkurs Matematyczny o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

9 grudnia 2016 r. **eliminacje** **czas: 105 minut**

Przed Tobą test składający się z 25 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.
We wszystkich zadaniach za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt. UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N albo trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Powodzenia!

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi					Punkty
	a)	b)	c)	d)		
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Treści zadań

1. Rozwiązaniem równania $20-(x-(16-x))=x-(20-(x-16))$ jest liczba:

a) większa od 16; b) większa od 17; c) większa od 18; d) większa od 19.

2. Wartość wyrażenia $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\dfrac{1}{1+2+3+4+5}$ jest równa:

a) $\dfrac{4}{3}$; b) $\dfrac{5}{3}$; c) $\dfrac{7}{3}$; d) $\dfrac{8}{3}$.

3. Równość $\dfrac{1}{2^{11}}+\dfrac{3}{2^{13}}+\dfrac{5}{2^{15}}=\dfrac{n}{2^{17}}$ jest prawdziwa dla:

a) $n=33$; b) $n=112$; c) $n=132$; d) $n=144$.

4. Pod koniec lekcji matematyki nauczyciel zapisał na tablicy działanie arytmetyczne. Po przerwie uczniowie mieli uzasadnić, że nawiasy postawione przez nauczyciela są postawione poprawnie. W czasie przerwy dowcipny uczeń zmazał wszystkie postawione nawiasy oraz wynik działania i na tablicy pozostał napis $1:2:3:4:5=$. Przed przerwą na tablicy mógł być napis:

a) $[(1:2):(3:4)]:5=\dfrac{2}{15}$; b) $1:[(2:3):(4:5)]=1$;

c) $(1:2):[3:(4:5)]=\dfrac{2}{15}$; d) $[(1:2):3)]:(4:5)=\dfrac{1}{5}$.

5. Stop miedzi z ołowiem ma masę 50 kg i zawiera 30% miedzi. Aby ten stop zawierał 20% miedzi, należy go przetopić z kawałkiem ołowiu o masie:

a) 20 kg; b) 25 kg; c) 30 kg; d) 75 kg.

6. Prawdą jest, że

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}<\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}<\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$; d) $\sqrt{7}+\sqrt{7}+\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$.

7. Podczas lekcji o graniastosłupach i ostrosłupach nauczyciel zapisał na tablicy zadanie: *Liczba krawędzi pewnego ***słupa jest równa 2016. Ile ścian może mieć ten wielościan*? Prawdziwą odpowiedzią jest:

a) 674; b) 876; c) 1009; d) 1333.

8. W Matlandii są trzy miasta: A, B i C. Z miasta A do miasta B prowadzi 6 dróg, a z miasta B do miasta C prowadzą 4 drogi. Ile jest wszystkich sposobów odbycia podróży z miasta A do miasta C, przejeżdżając przez miasto B?

a) 4; b) 6; c) 10; d) 24.

9. Punkt D jest takim punktem boku AB trójkąta ABC, że $AC=CD=BD$. Jeżeli $\sphericalangle ACD=80^\circ$, to:

a) $\sphericalangle ABC=25^\circ$; b) $\sphericalangle ACB=100^\circ$; c) $\sphericalangle ABC=20^\circ$; d) $\sphericalangle ACB=105^\circ$.

10. Liczba $\dfrac{\overbrace{9999\cdots999}^{\text{24 dziewiątki}}}{999\,999\,999\,999}-1$ jest równa:

a) $9^{12}-1$; b) 9^{12}; c) 10^{12}; d) $10^{12}-1$.

11. Liczby całkowite x i y spełniają równość $3x=7y$. Wartością sumy $x+y$ może być liczba:

a) 1000; b) 1003; c) 1007; d) 1010.

12. Liczba $2+2^2+2^3+\cdots+2^{2015}+2^{2016}$ dzieli się przez:

a) 2; b) 3; c) 7; d) 15.

13. Przekrojem płaskim sześcianu może być wielokąt foremny o n bokach dla:

a) $n=3$; b) $n=4$; c) $n=5$; d) $n=6$.

14. Dodatnie liczby a, b, c spełniają proporcję $a:b:c=1:2:3$. Prawdą jest, że:

a) $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{3}{5}$; b) $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{5}{13}$;

c) $\dfrac{a^2(b+c)}{b^2(c+a)}=\dfrac{5}{16}$; d) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=\dfrac{1}{3}$.

15. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle ACB=90^\circ$, punkty M, N i P są środkami boków odpowiednio BC, AC i AB. Jeśli $AM=22$ i $BN=19$, to odcinek CP ma długość:

a) 12; b) 12,5; c) 13; d) 13,5.

16. Dostawca pizzy do jednego z pokojów w akademiku, w którym studenci „zrzucili się” po 7 zł, dostarczył 5 pizz i studentom zostało jeszcze 11 zł. Do drugiego pokoju, w którym było o trzech studentów więcej, niż w pokoju pierwszym, dostarczył 6 pizz. W drugim pokoju studenci „zrzucili się” po 6 zł i nic już im nie zostało. Jeśli każda pizza kosztowała tyle samo, to wynika stąd, że:

a) w pierwszym pokoju było 13 studentów;

b) w drugim pokoju było 16 studentów;

c) jedna pizza kosztowała 17 zł;

d) w pierwszym pokoju studenci za wszystkie pizze zapłacili 80 zł.

17. Dany jest kwadrat $ABCD$. Na zewnątrz tego kwadratu zbudowano trójkąty równoboczne ABE i BCF. Odcinki AF i CE przecinają się w punkcie P. Miara kąta EPF jest równa:

a) 115°; b) 120°; c) 125°; d) 130°.

18. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ mamy dane: $\sphericalangle BAE=\sphericalangle ABC=90^\circ$, $AB=CD=DE=2$ i $AE=BC=4$. Punkt P jest punktem przecięcia odcinków AC i BE. Zatem:

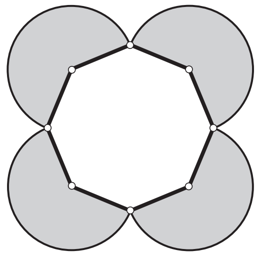
a) $PD=2+\sqrt{3}$; b) $[ADE]=2$; c) $[ABD]=4+\sqrt{3}$; d) $[PCDE]=2+\sqrt{3}$.

UWAGA. Zapis $[XYZ\ldots]$ oznacza pole wielokąta o kolejnych wierzchołkach $X, Y, Z, \ldots$

19. Ile ułamków wśród 160 liczb ze zbioru $\left\{\frac{1}{161}, \frac{2}{161}, \frac{3}{161}, \ldots, \frac{159}{161}, \frac{160}{161}\right\}$ to ułamki nieskracalne?

a) 28; b) 102; c) 132; d) 158.

20. Bok ośmiokąta foremnego (zobacz rysunek) ma długość $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Zacieniowana figura składa się z części kół o środkach w wierzchołkach tego wielokąta. Pole zacieniowanej figury jest:



a) liczbą niewymierną; b) równe $\frac{5}{2}\pi$;

c) równe $\frac{5}{2}$; d) liczbą wymierną.

21. Ile jest wszystkich liczb całkowitych n spełniających nierówności $\frac{1}{10001} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{101}$?

a) 89; b) 90; c) 91; d) 180.

22. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C. Okrąg o środku C przechodzi przez wierzchołek B tego trójkąta oraz przecina jego boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Wiadomo, że $AD = \frac{119}{13}$ oraz $BD = \frac{50}{13}$. Zatem:

a) $AB = 13$; b) $BC = 6$; c) $AC = \sqrt{133}$; d) $AE = 7$.

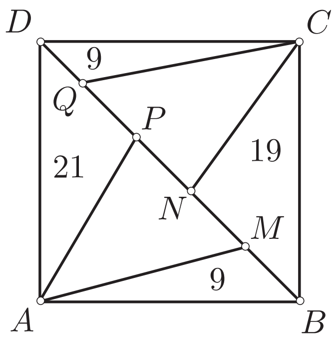
23. Liczba par (x,y) liczb całkowitych, spełniających równanie

$$x^2 + 4xy + 3y^2 = 43$$

jest równa:

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6.

24. Na przekątnej BD kwadratu $ABCD$ o polu 100 wybrano punkty M, N, P i Q (zobacz rysunek obok). Pola trójkątów ABM, BCN, CDQ, DAP są równe odpowiednio 9, 19, 9, 21. Spośród odcinków BM, MN, NP, PQ najdłuższym jest odcinek:



a) BM; b) MN; c) NP; d) PQ.

25. Dwie dodatnie liczby rzeczywiste x i y $(x > y)$ spełniają równość $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5$. Dla tych liczb prawdziwa jest nierówność:

a) $\frac{x+y}{x-y} > \frac{4}{3}$; b) $\frac{x+y}{x-y} > \frac{5}{3}$; c) $\frac{x+y}{x-y} > \frac{3}{2}$; d) $\frac{x+y}{x-y} > \frac{5}{2}$.