XVIII Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

3 grudnia 2015 r. **eliminacje** **czas: 105 minut**

Przed Tobą test składający się z 25 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.
We wszystkich zadaniach za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.
UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N albo trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Powodzenia!

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi					Punkty
	a)	b)	c)	d)		
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Treści zadań

1. Strony książki, którą obecnie czyta Ania, ponumerowano tradycyjnie rozpoczynając od numeru 1 na jej stronie tytułowej. Ania otworzyła tę książkę w ulubionym miejscu i dodała numery dwóch widocznych stron. Jako wynik mogła otrzymać liczbę:

a) 33; b) 39; c) 309; d) 323.

2. Trzech piratów dzieliło między sobą zdobyte monety. Pierwszy zabrał $\frac{3}{7}$ wszystkich monet. Drugi wziął 51% pozostałych, po czym trzeciemu zostało o 8 monet mniej, niż wziął drugi. Ile monet dzielili między sobą ci trzej piraci?

a) 560; b) 630; c) 700; d) 770.

3. Dodatnia liczba x jest 5 razy większa od liczby y. Liczba x^5 jest k razy większa od liczby y^5. Jest to prawdą dla:

a) $k=5$; b) $k=5^3$; c) $k=5^5$; d) $k=5^7$.

4. Wszystkie liczby całkowite od 1 do 7 wpisano w pola poniższego diagramu tak, że działania przedstawione na nim są wykonalne.

$$\boxed{A} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{+5} \boxed{B} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{C} \xrightarrow{+2} \boxed{} \xrightarrow{-4} \boxed{D}$$

Zatem:

a) $A+B=11$; b) $B+C=10$; c) $C+D=5$; d) $D+A=5$.

5. Marta uzyskała z testu 90% możliwych punktów do zdobycia, a Wojtek tylko 85% możliwych punktów do zdobycia. Liczby punktów jakie uzyskali Marta i Wojtek różniły się o 2. Jaką liczbę punktów w tym teście uzyskał Maciek, który uzyskał zaledwie 47,5% możliwych punktów do zdobycia?

a) 18; b) 19; c) 20; d) 21.

6. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt P jest środkiem ramienia AD danego trapezu. Jeżeli $BC=2$ oraz $\sphericalangle BPC=90^\circ$, to obwód trapezu $ABCD$ jest równy:

a) 6; b) 7; c) 8; d) nie da się go wyznaczyć.

7. Suma dwóch liczb pierwszych jest równa 33. Iloczyn tych dwóch liczb pierwszych wynosi:

a) 33; b) 62; c) 124; d) 186.

8. Rozpatrujemy liczby postaci $a_n=\underbrace{2015\,2015\,2015\ \ldots\ 2015\,2015}_{n\text{-krotnie powtórzona liczba 2015}}$,

np. $a_1=2015$, $a_2=2015\,2015$, $a_4=2015\,2015\,2015\,2015$.
Liczbą podzielną przez 9 jest liczba:

a) a_3; b) a_9; c) a_{27}; d) a_{33}.

9. Liczba par (m,n) dodatnich liczb całkowitych spełniających nierówności $m^2<n\leqslant 9$ jest równa:

a) 11; b) 13; c) 15; d) 17.

10. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC=30^\circ$. Na boku AC tego trójkąta wybrano taki punkt D, że $\sphericalangle ABD=20^\circ$, a na boku AB taki punkt E, że odcinki BD i CE są prostopadłe. Wówczas:

a) $\sphericalangle ACE=40^\circ$; b) $\sphericalangle AEC=120^\circ$; c) $\sphericalangle ADB=130^\circ$; d) $\sphericalangle BDC=60^\circ$.

11. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 55, podzielna przez:

a) 2; b) 4; c) 6; d) 8.

12. Dany jest taki równoległobok $ABCD$, w którym $AB = 2 \cdot AD$ oraz $\sphericalangle BAD = 60°$. Punkty M i N, które są spodkami wysokości poprowadzonych z wierzchołków D i B, leżą odpowiednio na bokach AB i CD tego równoległoboku. Ponadto punkt P jest środkiem boku AB. Prawdą jest, że:

a) $AM = CN$; b) $MN = 2 \cdot DM$; c) $\sphericalangle BAD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$; d) $BD = CP$.

13. Wysokość prostopadłościennego pokoju jest równa 3 m. Podczas remontu tego pokoju okazało się, że na jednokrotne pomalowanie dowolnej jego ściany należy zużyć więcej farby niż przy takim samym malowaniu jego prostokątnego sufitu. Pole powierzchni sufitu tego pokoju może być równe:

a) 7 m^2; b) 8 m^2; c) 9 m^2; d) 10 m^2.

14. Zapis dziesiętny liczby $77! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77$ ma na końcu:

a) 15 zer; b) 16 zer; c) 18 zer; d) 24 zera.

15. Sześcian o krawędzi długości 2 wpisany jest w sferę o promieniu r. Wówczas:

a) $r > 1$; b) $r > \frac{3}{2}$; c) $r > 2$; d) $r > \frac{5}{2}$.

16. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b dwusieczna kąta prostego ma długość:

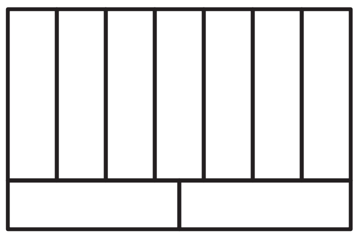
a) $\dfrac{ab}{\sqrt{2}(a+b)}$; b) $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$; c) $\dfrac{(a+b)\sqrt{2}}{ab}$; d) $\dfrac{2ab}{(a+b)\sqrt{2}}$.

17. Równość $xy = x + y$ jest spełniona przez liczby:

a) $x = 2$ i $y = 2$; b) $x = 4$ i $y = \frac{4}{3}$;

c) $x = \sqrt{2}$ i $y = 2 + \sqrt{2}$; d) $x = \sqrt{3}$ i $y = 3 + \sqrt{3}$.

18. Duży prostokąt został podzielony na 9 przystających mniejszych prostokątów (zobacz rysunek po prawej). Pole dużego prostokąta jest równe 504. Obwód dużego prostokąta wynosi:



a) 92; b) 138; c) 164; d) 184.

19. Dla ilu liczb n ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 65, 66\}$ liczba n^{3n} jest kwadratem liczby całkowitej?

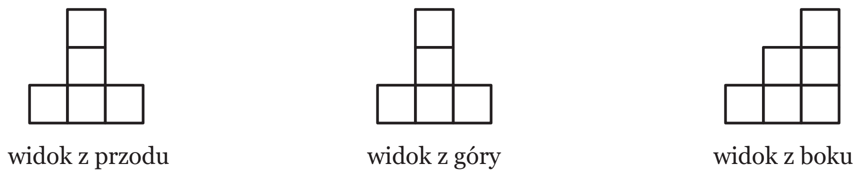
a) 33; b) 37; c) 40; d) 66.

20. Różne liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a-\frac{a}{b}=b-\frac{b}{a}$. Liczby te spełniają również równość:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$; b) $(a-1)(b-1)=1$;

c) $ab=a+b+1$; d) $(a^2-1)(b^2-1)=1+2ab$.

21. Z kilku jednakowych kostek sześciennych o krawędzi 5 cm Filip ułożył bryłę, której widoki z przodu, z góry i boku przedstawione są na rysunku poniżej.



Objętość bryły zbudowanej przez Filipa wynosi:

a) nie da się tego wyznaczyć. b) 750 cm^3; c) 875 cm^3; d) 1000 cm^3;

22. W jaskini pod górą Klimczok śpi straszny potwór. Kiedy jest głodny, budzi się i pożera tyle owiec ile wynosi suma cyfr roku, w którym się obudził. Następnie zapada w sen na tyle lat, ile zjadł owiec. Wiadomo, że potwór obudził się 1 grudnia 1422 roku. Potwór ten również obudził się w roku:

a) 1449; b) 1458; c) 2000; d) 2015.

23. Liczba

$$A=\sqrt{(2015+2015)+(2016-2016)+(2015\cdot 2015)+(2016:2016)}$$

jest równa:

a) $\sqrt{2015}$; b) $\sqrt{2016}$; c) 2015; d) 2016.

24. Dodatnie liczby całkowite a i b spełniają równość $ab=a+b+22$. Liczby a i b spełniają też związek:

a) $24(a+b)=13ab$; b) $a+b=25$;

c) $(a+1)(b+1)=75$; d) $ab<50$.

25. W trójkącie prostokątnym ABC, o kącie prostym przy wierzchołku C, środkiem boku AB jest punkt M. Okrąg o środku O i średnicy AC przecina bok AB w takim punkcie K, że $AK:KB=1:3$. Wówczas:

a) $AB=2\cdot AC$; b) $\sphericalangle BMC=120^\circ$;

c) $BC=3\cdot AC$; d) $\sphericalangle KOC=120^\circ$.