XVI Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

20 listopada 2013 r. **eliminacje** **czas: 90 minut**

Przed Tobą test składający się z 26 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.
We wszystkich zadaniach za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.
UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N albo trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Powodzenia!

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi					Punkty
	a)	b)	c)	d)		
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Tematy zadań

1. Dane są liczby:

$$a=\frac{1+3}{5+7},\quad b=\frac{1+3+5}{7+9+11},\quad c=\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}.$$

Prawdą jest, że:

a) $a=b$; b) $b<c$; c) $a<c$; d) $b=c$.

2. Cenę pewnego towaru obniżono o 25%, a następnie dwukrotnie podniesiono: najpierw o 20%, a później jeszcze o 10%. Obecna cena tego towaru różni się od jego ceny początkowej o:

a) 5%; b) 4%; c) 2%; d) 1%.

3. W rodzinie jest pięcioro dzieci. Czworo z nich jest starszych od najmłodszego odpowiednio o 2, 6, 8 i 12 lat. Wiadomo, że wiek każdego dziecka w tej rodzinie wyraża się liczbą pierwszą. Najmłodsze z rodzeństwa może mieć:

a) 3 lata; b) 5 lat; c) 7 lat; d) 11 lat.

4. Niech $\overline{ab}$ oznacza dwucyfrową liczbę naturalną, w której a jest cyfrą dziesiątek, a b — cyfrą jedności. Ile jest takich liczb naturalnych $\overline{ab}$, że $a > b$?

a) 43; b) 44; c) 45; d) 46.

5. Różne od zera liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a+b=0$. Dla tych liczb prawdą jest, że:

a) $a^2+b^2=0$; b) $a^3+b^3=0$; c) $a^4+b^4=0$; d) $a^5+b^5=0$.

6. Dane jest równanie $\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x-2)-3\right]-4\right\}=1$. Rozwiązanie tego równania spełnia nierówność:

a) $x>46$; b) $x>56$; c) $x>66$; d) $x>76$.

7. Liczby rzeczywiste x i y spełniają równości

$$x=y+8 \quad \text{i} \quad x^2=y^2+200.$$

Wartość wyrażenia $x+y$ wynosi:

a) 20; b) 25; c) 30; d) 40.

8. Dane są dwie proste równoległe. Na jednej z nich zaznaczono 3 różne punkty, a na drugiej 4 różne punkty. Liczba wszystkich trójkątów o wierzchołkach w zaznaczonych punktach jest równa:

a) 12; b) 24; c) 30; d) 48.

9. Liczby $x=\sqrt{10}-2$ i $y=\sqrt{10}+4$ spełniają zależność:

a) $2x^2+y^2=30$; c) $xy=x+y$;

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ jest liczbą całkowitą; d) $(x+10)(y+10)>11(x+y+9)$.

10. Dane są takie liczby całkowite m i n, że liczby $2m+n$ i $2m-n$ są podzielne przez 6. Wówczas obie liczby m i n są podzielne przez:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6.

11. Liczba o 1 większa od liczby naturalnej a ma kwadrat o 1001 większy od kwadratu liczby a. Liczba a jest większa od:

a) 202; b) 303; c) 404; d) 505.

12. Na płaszczyźnie dane są takie różne między sobą punkty A, B, C, D i E, że $AB=BC=AC=BD=CD=DE=CE$. Spośród tych punktów leżącymi na jednej prostej mogą być punkty:

a) A, B, C; b) A, B, D; c) A, C, E; d) B, D, E.

13. W wyniku reorganizacji pewnej szkoły liczba uczniów jednej z klas powiększyła się o 40%. Teraz w tej klasie może ich być razem:

a) 21; b) 28; c) 32; d) 35.

14. W kole o promieniu długości r narysowano nie przecinające się cięciwy, każda o długości r. Liczba narysowanych cięciw mogła być równa:

a) 3; b) 5; c) 7; d) 9.

15. Liczby a i b są liczbami całkowitymi. Reszta z dzielenia liczby a^2+b^2 przez 4 może być równa:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

16. W okrąg o środku O wpisano trójkąt ABC. Jeżeli $\sphericalangle OAB=\sphericalangle OBA=50^\circ$, to może być spełniona równość:

a) $\sphericalangle ACB=40^\circ$; c) $\sphericalangle ACB=140^\circ$;
b) $\sphericalangle CAB+\sphericalangle CBA=40^\circ$; d) $\sphericalangle CAB+\sphericalangle CBA=140^\circ$.

17. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ istnieje taki punkt P, że $AP=4$, $BP=5$, $CP=6$. Wtedy:

a) $DP=3$; b) $DP=2\sqrt{3}$; c) $DP=4$; d) $DP=3\sqrt{3}$.

18. W dodawaniu $\overline{AA}+\overline{AA}=\overline{BAC}$ jednakowym literom odpowiadają jednakowe cyfry, a różnym literom — różne cyfry. Dla cyfr A, B, C spełnione są zależności:

a) $A+B=10$; b) $B+C=A$; c) $A^2+B^2=10C$; d) $A+B+C=19$.

Uwaga. Zapis $\overline{XYZ\ldots}$ oznacza dodatnią liczbę całkowitą, której kolejnymi cyframi zapisu dziesiątkowego są: X, Y, Z, ...

19. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$. Wtedy:

a) $[ABM]+[CDM]=[BCM]+[ADM]$;

b) $[ABM]\cdot[CDM]=[BCM]\cdot[ADM]$;

c) $AM+CM=BM+DM$;

d) $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.

Uwaga. Symbol $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

20. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$, poprowadzono wysokość CD. Wtedy:

a) trójkąty ACD i CBD są podobne; c) $CD = \frac{AC + BC}{2}$;

b) $CD^2 = AD \cdot BD$; d) $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$.

21. Liczba $\frac{n^{k+1}}{(k+1)^n}$ jest liczbą całkowitą dla

a) $n = 8$ i $k = 15$; c) $n = 12$ i $k = 31$;

b) $n = 9$ i $k = 8$; d) $n = 15$ i $k = 24$.

22. Liczba wszystkich różnych trójkątów równobocznych, których wierzchołki są jednocześnie wierzchołkami danego sześcianu jest równa:

a) 4; b) 8; c) 12; d) 16.

23. Dodatnie liczby całkowite a i b spełniają nierówności $\frac{5}{7} < \frac{3a - b}{3a + b} < \frac{9}{11}$. Najmniejsza możliwa wartość a jest równa:

a) 1; b) 3; c) 5; d) 7.

24. Punkty A_1, B_1, C_1 są środkami boków odpowiednio BC, CA, AB trójkąta ABC. Odcinki AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w punkcie M. Jeżeli $AB = 3CM$, to:

a) $AB = 2CC_1$; c) $\sphericalangle ACB = 90°$;

b) $AM = CM$; d) $MC_1^2 = \frac{1}{36}(AC^2 + BC^2)$.

25. Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x określamy dwie operacje:
1° $x^+ = x(x - 2) + 2$,
2° x° jest taką liczbą dodatnią, że $(x^\circ)^+ = x$.

Prawdą jest, że

a) $(2^+)^+ = 2$; b) $(3^+)^+ = 15$; c) $(2^+)^\circ = (2^\circ)^+$; d) $(2^\circ)^\circ = 2$.

26. Obok dana jest tablica liczb. Jaś i Małgosia wybrali z tej tablicy po cztery liczby (każdy inne). Okazało się, że suma liczb wybranych przez Jasia jest trzy razy większa od sumy liczb wybranych przez Małgosię. Jaka liczba z tej tablicy nie została przez nich wybrana?

4	5	7
8	12	13
14	23	24

a) 8; b) 12; c) 13; d) 14.