# XII Konkurs Matematyczny
# o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

**3 grudnia 2009 r.** **eliminacje** **czas: 90 minut**

Przed Tobą test składający się z 26 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.
We wszystkich zadaniach za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt. UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N lub trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

**1.** Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

**2.** Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

| Nr zad. | Odpowiedzi | | | | | Punkty |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | b) | c) | d) | | |
| **1.** | T | T | N | T | | |
| **2.** | T | N | N | N | | |
| | | | | | | |

**Tematy zadań**

**1.** Pierwszego dnia uczeń przeczytał 20% książki, a drugiego dnia 20% pozostałej części. W ten sposób pozostały mu do końca tej książki 192 strony. Ile stron liczy ta książka?

a) 240, b) 300, c) 320, d) 360.

**2.** Rozwiązaniem równania $\frac{1}{2}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{4}$ jest liczba:

a) $x=4$, b) $x=6$, c) $x=7$, d) $x=8$.

**3.** Jeden procent z jednego miliona to:

a) 100, b) 1 000, c) 10 000, d) 100 000.

**4.** Cena 1 $m^3$ gazu była równa 1,35 zł. Po kolejnej podwyżce Państwo Kowalscy postanowili bardziej ekonomicznie używać gazu i w wyniku tego zużycie zmniejszyło się o 10%. Mimo tego rachunek wzrósł o 8%. O ile groszy podrożał 1 $m^3$ gazu?

a) 30, b) 27, c) 25, d) 20.

**5.** Czworokąt $ABCD$, w którym $AB=8$, $BC=6$, $CD=4$ i $\sphericalangle ABC=90^\circ$, jest wpisany w okrąg. Długość boku $AD$ tego czworokąta jest:

a) równa 10,
c) równa $2\sqrt{21}$,
b) większa niż $4\sqrt{5}$,
d) mniejsza niż 10.

**6.** Liczby $a$, $b$, $c$, $d$ i $e$ są dodatnie oraz $\sqrt[4]{abcd}=2\sqrt{10}$ i $\sqrt[5]{abcde}=2\sqrt[5]{50}$. Wówczas:

a) $e=1$, b) $e>1$, c) $e<2$, d) nie można wyznaczyć liczby $e$.

**7.** Pole kwadratu jest o 100 mniejsze od pola koła opisanego na tym kwadracie. Pole tego koła jest równe:

a) $50\pi$, b) $50(2+\pi)$, c) $\dfrac{100\pi}{\pi+2}$, d) $\dfrac{100\pi}{\pi-2}$.

**8.** Dodatnia liczba rzeczywista $a$ spełnia warunek $a^2=a+3$. Wtedy:

a) $a^4=7a+11$, b) $a^3=4a+3$, c) $a^5=19a+45$, d) $a^4=7a^2-9$.

**9.** Na ile sposobów można przedstawić liczbę 2009 jako sumę dwóch liczb pierwszych?

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

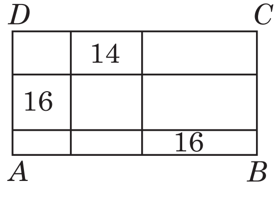
**10.** Ciąg liczb $(a,b,c,d,e)$ jest taki, że $b-a=c-b=d-c=e-d\neq 0$. Zatem:

a) $d-a=e-b$, b) $a+e=2c$, c) $a+e<3c$, d) $\dfrac{d-a}{e-c}>1$.

**11.** Dla liczb dodatnich $x$ niech $\langle x\rangle = 1+\dfrac{1}{x}$. Wtedy $\langle\langle x\rangle+1\rangle$ jest równe:

a) $\dfrac{3x+1}{2x+1}$, b) $x+2$, c) $\dfrac{x}{x+1}$, d) $2-\dfrac{1}{x+1}$.

**12.** Prostokąt $ABCD$ podzielono odcinkami równoległymi do jego boków na kilka mniejszych prostokątów. Obwody trzech z nich podano na rysunku. Obwód prostokąta $ABCD$ jest:




a) równy 23, b) większy niż 23, c) równy 46,
d) niemożliwy do wyznaczenia.

**13.** Jeżeli $\frac{a}{b}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{1000}\right)$ i ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to:

a) $a-b=999$,  b) $2a+3b=2009$,  c) $a\cdot b<2000$,  d) $a+b>10^3$.

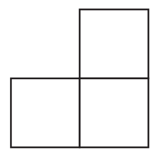
**14.** Ile jest prostokątów o bokach całkowitych, których pole i obwód wyraża się tą samą liczbą?

a) 1,  b) 2,  c) 4,  d) 5.

**15.** W klasie znajdowała się pewna liczba uczniów. Ich średni wiek równy był ich liczbie. Gdy do klasy wszedł 55-letni nauczyciel, okazało się, że nadal średni wiek osób znajdujących się w klasie był równy liczbie osób tam przebywających. Ilu uczniów było obecnych w klasie?

a) 25,  b) 26,  c) 27,  d) 28.

**16.** Figura składa się z trzech kwadratów jednostkowych (patrz rysunek). Można do tej figury dorysować czwarty kwadrat jednostkowy, aby otrzymana figura:



a) miała środek i oś symetrii,

b) miała oś symetrii i nie miała środka symetrii,

c) miała środek symetrii i nie miała osi symetrii,

d) nie miała ani środka symetrii, ani osi symetrii.

**17.** Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe o cyfrach różnych od zera. Niech $\overline{abc}$ oznacza liczbę, której cyfrą setek jest $a$, cyfrą dziesiątek jest $b$ i cyfrą jedności jest $c$. Takich liczb trzycyfrowych $\overline{abc}$, że zachodzi równość

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=888$$

jest dokładnie:

a) jedna,  b) dwie,  c) trzy,  d) cztery.

**18.** Dana jest liczba $n=\underbrace{999...99}_{2010\text{ cyfr}}$, której zapis dziesiętny składa się z 2010 dziewiątek. Ile dziewiątek zawiera zapis dziesiętny liczby $n^2$ ?

a) 2009,  b) 2010,  c) $2009^2$,  d) $2010^2$.

**19.** Liczba $x$ jest taką liczbą dodatnią, że $x^2+\frac{1}{x^2}=4$. Wówczas, jeżeli $a=x^3+\frac{1}{x^3}$, to:

a) $a=8$,  b) $a=3\sqrt{6}$,  c) $a>2$,  d) $a<9$.

**20.** Dla ilu liczb całkowitych $x$ istnieje taka liczba całkowita $y$, że zachodzi równość $x^2 = y^2 + 15$?

a) 1, b) 2, c) 4, d) 8.

**21.** Przekątna czworokąta ma długość 12 i dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty, z których jeden ma obwód 29, a drugi 26. Jeżeli $L$ jest obwodem danego czworokąta, to:

a) $L > 30$, b) $L = 31$, c) $L = 43$, d) $L = 55$.

**22.** Pewien ostrosłup ma 170 wierzchołków. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

a) 169, b) 170, c) 338, d) 340.

**23.** Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym: $AB \parallel CD$, $AB = 10$, $AD = 2\sqrt{5}$ oraz przekątna $BD$ jest prostopadła do boku $AD$. Pole trapezu $ABCD$ jest równe:

a) 28, b) 30, c) 32, d) 34.

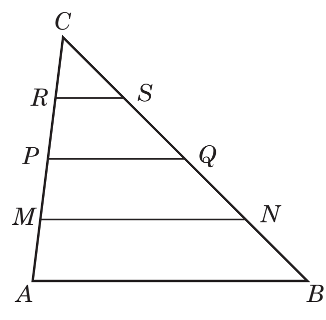
**24.** Jeżeli $n$-kąt foremny ma dokładnie 54 przekątne, to $n$ jest:

a) równe 11, b) większe od 11, c) równe 12, d) równe 21.

**25.** Ania i Beata postanowiły zaoszczędzić pieniądze na wakacje. Ania w pierwszym miesiącu zaoszczędziła 10 zł, a w każdym następnym o 10 zł więcej niż w poprzednim. Beata w pierwszym miesiącu zaoszczędziła złotówkę, a w każdym następnym dwa razy więcej niż w poprzednim. Po dziewięciu miesiącach oszczędzania:

a) Ania zaoszczędziła 450 zł,
b) Ania zaoszczędziła więcej niż Beata,
c) Beata zaoszczędziła 410 zł,
d) Beata zaoszczędziła więcej niż Ania.

**26.** Dany jest trójkąt $ABC$. Punkty $M$, $P$, $R$ leżą na boku $AC$ danego trójkąta, a punkty $N$, $Q$, $S$ na boku $BC$ tego trójkąta. Ponadto $AM = MP = PR = RC$ oraz odcinki $MN$, $PQ$ i $RS$ są równoległe do boku $AB$ (patrz rysunek obok). Niech $[WXYZ]$ oznacza pole wielokąta o kolejnych wierzchołach: $W$, $X$, $Y$, $Z$. Jeżeli pole trójkąta $ABC$ jest równe 16, to prawdą jest, że:




a) $[RSC] = 2$, b) $[PQSR] = 3$, c) $[MNQP] = 5$, d) $[ABNM] = 8$.