XI Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

4 grudnia 2008 r. **eliminacje** **czas: 90 minut**

Przed Tobą test składający się z 24 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.

We wszystkich zadaniach za każdą prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za złą odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.

UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N lub trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi					Punkty
	a)	b)	c)	d)		
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Tematy zadań

1. Prawdą jest, że:

a) $1010=777+222+11$,

b) $1234=1111+99+44$,

c) $2008=1111+666+99+88+44$,

d) $2009=1111+777+99+22$.

2. Niech $A=\dfrac{15-14+13-12+11-10+9-8+7-6+5-4+3-2+1}{1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14}$. Wtedy:

a) $A=-\dfrac{22}{7}$, b) $A<0$, c) $A=-\dfrac{8}{7}$, d) $A>-\dfrac{3}{2}$.

3. Liczba $\left(\sqrt{11}+\sqrt{44}+\sqrt{99}\right)^2$ jest równa

a) 154, b) 265, c) 396, c) 486.

4. Kąt między wskazówką godzinową i minutową zegara o godzinie 10^{40} jest równy:

a) $70°$, b) $75°$, c) $80°$, c) $85°$.

5. Niech $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y. Określamy operację:

$$a*b=\max\{2a,\, a+b\}.$$

Liczba $(2*3)*(3*2)$ jest równa:

a) 11, b) 12, c) 13, d) 14.

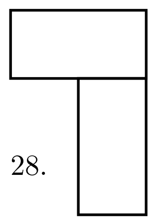
6. Cyfra jedności zapisu dziesiętnego liczby

$$1+1\cdot2+1\cdot2\cdot3+\ldots+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2008$$

jest równa:

a) 1, b) 3, c) 5, d) 7.

7. Dwa jednakowe prostokąty o wymiarach 4×8 ułożono jeden obok drugiego (patrz rysunek) i utworzono figurę w kształcie obróconej litery L. Jaki jest obwód tak otrzymanej figury:



a) 40, b) 36, c) 32, d) 28.

8. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt P. Rzuty prostokątne punktu P na boki odpowiednio AB, BC, CA to K, L, M. Wiadomo, że $PK=1$, $PL=2$, $PM=3$. Bok trójkąta ABC ma długość:

a) równą $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$, c) większą niż 6,

b) mniejszą niż 7, d) równą $4\sqrt{3}$.

9. Suma cyfr liczby A wynosi 2008, a suma cyfr liczby B wynosi 2009. Reszta z dzielenia liczby $5A+2B$ przez 9 jest równa:

a) 7, b) 5, c) 2, d) 0.

10. Liczby rzeczywiste a, b, c, d są takie, że $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ oraz $b\neq0$ i $d\neq0$. Jeżeli $U=\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$, to

a) $U=1$, b) $U=\dfrac{a}{b}$, c) $U=\dfrac{a^2}{b^2}$, d) $U=2$.

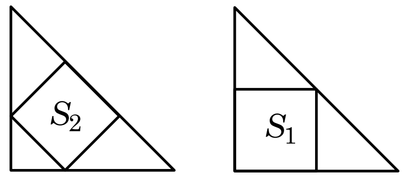
11. Jeżeli $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{x}}}=16$, to

a) $x>2^{20}$, b) $x=2^{22}$, c) $x<2^{24}$, d) $x=2^{26}$.

12. Niech $x=\sqrt[6]{10}$ oraz $W=(x-1)(x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6)$. Wówczas:

a) $W<100$, b) $W>90$, c) $W=90$, d) $W<90$.

13. W dwa przystające trójkąty równoramienne prostokątne wpisano kwadraty o polach odpowiednio S_1 i S_2 (patrz rysunek). Wówczas:



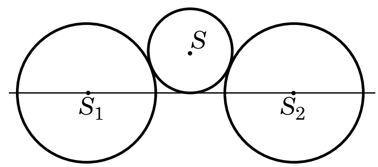
a) $9S_2=8S_1$, c) $7S_1=8S_2$,

b) $8S_2=9S_1$, d) $8S_1=7S_2$.

14. Ile liczb naturalnych n spełnia nierówność $99<\sqrt{n+100}<101$?

a) 399, b) 400, c) 401, d) 402.

15. Dane są dwa okręgi o środkach odpowiednio S_1, S_2 i każdy o promieniu 24. Okrąg o środku S jest styczny zewnętrznie do danych dwóch okręgów oraz do prostej przechodzącej przez punkty S_1 i S_2. Jeżeli $S_1S_2=72$, to promień okręgu o środku S jest:



a) równy 12, c) większy niż 12,
b) liczbą niewymierną, d) równy 15.

16. W prostokącie $ABCD$ o wymiarach $AB=12$ i $AD=5$ punkty E i F są rzutami prostokątnymi wierzchołków odpowiednio D i B na przekątną AC. Długość łamanej $BFED$ jest:

a) równa $\dfrac{239}{13}$, c) mniejsza od 19,

b) większa od 19, d) liczbą całkowitą.

17. W kwadracie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku CD. Punkt P jest takim punktem wewnątrz tego kwadratu, że $AP=BP=EP=10$. Pole tego kwadratu jest:

a) liczbą wymierną, c) mniejsze niż 250,

b) liczbą całkowitą, d) większe niż 250.

18. Promień okręgu wpisanego w romb jest cztery razy mniejszy od boku tego rombu. Kąt rozwarty tego rombu ma miarę:

a) 120°, b) 135°, c) 150°, d) 165°.

19. Kwadrat $ABCD$ o boku 10 zgięto wzdłuż przekątnej AC tak, że płaszczyzny trójkątów ABC i ACD są prostopadłe. Odległość wierzchołków B i D jest teraz równa:

a) 5, b) $5\sqrt{2}$, c) 10, d) $10\sqrt{2}$.

20. Ile jest par (a, b) liczb całkowitych spełniających równanie

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}=\sqrt{ab-1}?$$

a) 0, c) więcej niż 2,

b) 2, d) nieskończenie wiele.

21. Istnieją takie trzy kolejne liczby całkowite dodatnie a, b, c, że liczba

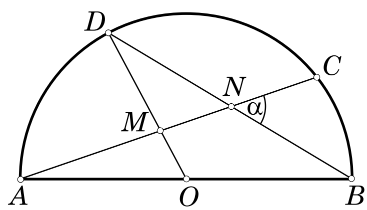
$$abc+\frac{1}{3}(a+b+c)$$

jest:

a) parzysta, c) kwadratem liczby całkowitej,

b) sześcianem liczby całkowitej, d) podzielna przez 11.

22. W półokręgu o środku O i średnicy AB poprowadzono cięciwy AC i BD oraz promień OD. Wiadomo, że $\sphericalangle OAC=19^\circ$ i $\sphericalangle OMA=99^\circ$. Miara kąta BNC jest równa α. Zatem:



a) $\alpha=49^\circ$, c) $\alpha=51^\circ$,

b) $\alpha=50^\circ$, d) $\alpha=52^\circ$.

23. Jeżeli $xy=a$, $yz=b$, $zx=c$ i żadna z liczb a, b, c nie jest równa zero, to $x^2+y^2+z^2$ jest równe:

a) $\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$, c) $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$,

b) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$, d) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}$.

24. Jeżeli $A=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2007}+\sqrt{2009}\right)$ i $B=\sqrt{2008}$, to

a) $A<B$, b) $A=B$, c) $A>B$, d) $A^2=B^2+1$.