X Konkurs Matematyczny
o Puchar Dyrektora V LO w Bielsku-Białej

eliminacje

6 grudnia 2007 r. **czas: 90 minut**

Przed Tobą test składający się z 26 zadań. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których **co najmniej jedna jest prawdziwa**. Twoim zadaniem jest wypełnienie tabeli odpowiedzi wpisując **T** lub **N** w zależności od tego czy odpowiedź jest prawdziwa, czy fałszywa.

Za każda prawidłową odpowiedź otrzymasz 3 punkty, za brak odpowiedzi 0 punktów, za zła odpowiedź zostanie Ci odjęty 1 punkt.

UWAGA! Jeżeli w zadaniu udzielisz cztery odpowiedzi N lub trzy odpowiedzi N i jednocześnie nie udzielisz odpowiedzi T, otrzymasz za to zadanie minus 12 punktów.

Przykład wypełniania karty odpowiedzi.

1. Liczba osi symetrii trójkąta może być równa:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

2. Iloczyn $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{6}\right)$ wynosi:

a) $8\sqrt{30}-39$, b) $8\sqrt{30}+9$, c) $4\sqrt{30}-39$, d) $8\sqrt{30}$.

Nr zad.	Odpowiedzi a)	b)	c)	d)		Punkty
1.	T	T	N	T		
2.	T	N	N	N		

Tematy zadań

1. Wynikiem działania $22222\cdot 33333-66666\cdot 11111$ jest liczba

a) ujemna, b) nieujemna, c) dodatnia, d) niedodatnia.

2. Spośród pięciu kolejnych liczb całkowitych co najmniej jedna dzieli się przez:

a) 6, b) 5 c) 4, d) 3.

3. Liczby x i y są takie, że suma ich odwrotności jest równa połowie ich sumy. Takimi liczbami są:

a) $x=\dfrac{12}{7}$ i $y=\dfrac{7}{6}$,

c) $x=3\sqrt{3}+5$ i $y=3\sqrt{3}-5$,

b) $x=3\pi-5$ i $y=5-3\pi$,

d) $x=3$ i $y=-4$.

4. W ciągu dwóch dni dwie kury znoszą 2 jajka. Ile jajek zniesie sześć takich kur w ciągu sześciu dni?

a) 6, b) 12 c) 18, d) 32.

5. Liczba $\sqrt{20}+\sqrt{45}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ jest liczbą:

a) wymierną, b) niewymierną, c) całkowitą, d) dodatnią.

6. Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich dodatnich liczb całkowitych jednocyfrowych jest równa:

a) 360, b) 2520, c) 5040, d) 15120.

7. W trójkącie o bokach długości 10, 15, 15 wysokości mają długości:

a) $10\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$,

b) $10\sqrt{2}$, $\dfrac{20}{3}\sqrt{2}$, $\dfrac{20}{3}\sqrt{2}$,

c) $10\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $30\sqrt{2}$,

d) $10\sqrt{2}$, $\dfrac{40}{3\sqrt{2}}$, $\dfrac{40}{3\sqrt{2}}$.

8. Wiadomo, że dla liczb całowitych dodatnich x, y, z, t zachodzi równość

$\dfrac{16}{9}=x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z+\frac{1}{t}}}$. Wtedy:

a) $x=1$, $y=1$, $z=2$, $t=3$,

b) $x=1$, $y=1$, $z=3$, $t=2$,

c) $x=1$, $y=1$, $z=3$, $t=1$,

d) $x=1$, $y=1$, $z=2$, $t=1$.

9. Dla liczb rzeczywistych a i b określamy operację $a\star b$ następująco:

$a\star b=\dfrac{1}{a-b}$, gdy $a\neq b$ oraz $a\star b=0$, gdy $a=b$.

Wówczas:

a) $(5\star(10\star10))\star0=5$,

b) $2\star(2\star(2\star2))>1$,

c) $(1003\star((0\star1004)\star0))\star0=2007$,

d) $(((2008\star(-1))\star0)\star1)\star0=2008$.

10. Liczby a, b, c, d, e są dodatnie. Wiadomo, że $ab=2$, $bc=3$, $cd=4$, $de=5$. Wtedy:

a) $\dfrac{e}{a}=\dfrac{8}{15}$,

b) $a\cdot d=\dfrac{8}{3}$,

c) $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{e}<\dfrac{3}{2}$,

d) wartość ilorazu $\dfrac{b}{d}$ nie zależy od a.

11. Nieprawdą jest, że zachodzi równość:

a) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$,

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$,

c) $\dfrac{2}{\sqrt{11}-3}=\sqrt{11}+3$,

d) $\left(1+(1+2^{-1})^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{4}{5}$.

12. Czworokąt wypukły ma wszystkie kąty równe. Wynika z tego, że zawsze:

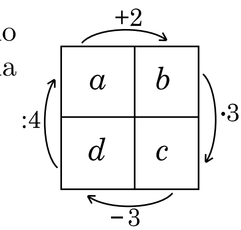
a) można na nim opisać okrąg, c) jest to równoległobok,

b) ma równe przekątne, d) można w niego wpisać okrąg.

13. Dwa krótsze boki trójkąta rozwartokątnego mają długości 5 i 7. Długość najdłuższego boku tego trójkąta też jest liczbą całkowitą. Może być ona równa:

a) 11, b) 10, c) 9, d) 8.

14. W pola kwadratowej tablicy (patrz rysunek) wpisano takie liczby a, b, c, d, że wszystkie wyniki działań na grafie są poprawne. Wtedy:



a) $a+b+c=22$, c) $c+d+a=30$,

b) $b+c+d=32$, d) $d+a+b=20$.

15. Dwa okręgi, o różnych promieniach, mogą dzielić płaszczyznę na trzy lub cztery części. Na ile części mogą dzielić płaszczyznę trzy okręgi o promieniach parami różnych?

a) 4, b) 5, c) 6, d) 7.

16. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu, którego średnicą jest odcinek AC. Wiadomo, że trójkąt BCD jest trójkątem równoramiennym oraz kąt ACD jest równy $40°$. Kąt BDC może być równy:

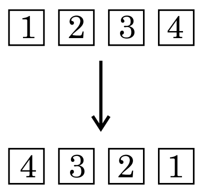
a) $50°$, b) $60°$, c) $65°$, d) $80°$.

17. Pewna funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(1)=2007$ i $f(2007)=1$. Wtedy:

a) $f(1000)<1004$, c) $f(3)-2=f(5)+2$,

b) $f(10)>2000$, d) dla pewnego x zachodzi $f(x)=x$

18. Mamy cztery klocki oznaczone liczbami 1, 2, 3, 4 i ustawione w tej kolejności. *Operacją* nazwiemy zamianę miejscami dwóch sąsiednich klocków. Aby ustawić te klocki w kolejności 4, 3, 2, 1 możemy wykonać:



a) 5 takich operacji, c) 7 takich operacji,

b) 6 takich operacji, d) 8 takich operacji.

19. Czworościan foremny można tak przeciąć płaszczyzną, aby w przekroju otrzymać:

a) trapez równoramienny, c) pięciokąt,

b) równoległobok, d) trójkąt nierównoramienny.

20. Wiadomo, że $\dfrac{1}{a+1}=2-a$. Wartość wyrażenia $(a+1)^2+\dfrac{1}{(a+1)^2}$ jest:

a) równa 7, b) równa 9, c) równa 13,

d) inna niż poprzednie.

21. Niech $p(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n, np. $p(4)=4$, $p(17)=$ $=1\cdot 7=7$, $p(36)=3\cdot 6=18$. Wartość wyrażenia $p(1)+p(2)+p(3)+\ldots+p(50)$ jest równa

a) 495, b) 550, c) 605, d) 815.

22. Podstawą graniastosłupa prostego jest n–kąt foremny, a wszystkie jego ściany boczne są kwadratami. Niech K_n oznacza liczbę krawędzi takiego graniastosłupa, a S_n – liczbę jego ścian. Prawdą jest, że:

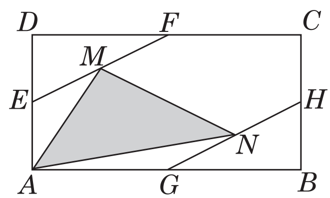
a) $K_4=2\cdot S_4$, b) $K_{15}-S_{15}=28$, c) $K_{10}\cdot S_{10}=360$,

d) istnieje takie n, że $K_n\cdot S_n=1080$.

23. Liczba naturalna zapisana w systemie dziesiątkowym za pomocą 2007 dwójek, czyli $\underbrace{222\ldots22}_{\text{2007 cyfr}}$, jest podzielna przez:

a) 37, b) 222, c) 12, d) 333.

24. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach $AB=8$ i $AD=4$. Punkty E, F, G, H są odpowiednio środkami boków AD, CD, AB, BC, a punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków EF i GH. Pole trójkąta AMN jest równe:



a) 7, b) 8, c) 9, d) 10.

25. Dana jest dodatnia liczba p oraz takie liczby rzeczywiste x i y, że

$$x+y=\sqrt{p+4} \quad \text{oraz} \quad x-y=\sqrt{p}.$$

Wtedy:

a) $xy=1$, b) $x^2+y^2=p+2$, c) $x^4+y^4=p^2+4p+2$,

d) wartości wyrażeń ze wszystkich poprzednich podpunktów zależą od p.

26. Liczby a i b są liczbami całkowitymi. Wykresy funkcji $y=6x+b$ i $y=ax+3$ przechodzą przez ten sam punkt na osi Ox. Ile różnych wartości może przyjmować suma $a+b$?

a) 5, b) 6, c) 7, d) 8.